УДК 624.15 (075.8)

Моделирование свайного основания как системы узлов с парным взаимодействием: теоретические основы метода

А.И. Русаков

В практике расчета железобетонных фундаментов на свайном основании широко используются конечно-элементные модели сооружений, в которых основание описывается кнопочной моделью: либо свайное поле (СП) заменяется непрерывной поверхностью под подошвой фундамента, создающей отпор по Винклеру, либо каждая свая рассматривается как упругая опора с известной жесткостью без учета отпора грунта между сваями. Оба подхода принципиально не отличаются и дают практически одинаковые результаты. В их рамках не удается выявить возрастание вертикальной реакции основания под подошвой жесткого фундамента при приближении к его краю [1; 2]. Серьезность этого недостатка проявляется в неправильной оценке нагрузки на сваи с краю СП и неправильном армировании фундаментной плиты (ФП) вблизи ее края (см. разд. 3).

В настоящей статье предлагается метод моделирования основания как системы упругих связей на сети узлов, покрывающей поверхность основания. Каждый узел имеет упругую опору, моделирующую деформации сжатия грунта при вертикальном перемещении узла, и систему вертикальных упругих связей с соседними узлами, моделирующими работу грунта на сдвиг. Сетка узлов основания задается таким образом, чтобы частью ее оказалась сеть СП. Узлы основания, расположенные в головах свай, моделируют работу свай в составе конечно-элементной модели каркаса дома. Условием адекватности модели основания как системы упругих связей является представление потенциальной энергии упругой деформации грунта основания в виде функции перемещений системы узлов и совпадение этой функции с потенциальной энергией системы упругих связей.

Постановка задачи на моделирование СП. Рассмотрим прямоугольное СП с достаточно малым шагом свай s, чтобы можно было пренебречь отпором грунта в промежутках между ними. Полагаем, что сваи абсолютно жесткие и их поперечный размер намного меньше расстояния s. Сваи погружены в линейно-деформируемый слой грунта толщиной H, который образован совокупностью n однородных слоев толщины h_i, из них m слоев находится ниже концов свай (рис. 1). Протяженность массива грунта за пределами СП будем считать конеч-

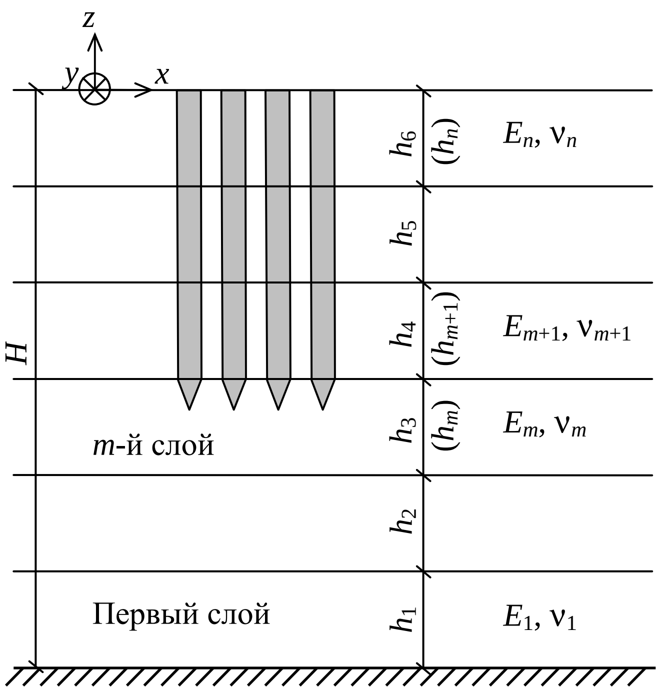

Рис. 1. Свайное основание. E_i, ν_i — модуль деформации и коэффициент Пуассона i-го слоя грунта

ной, но достаточно большой; на практике для СП размера в плане $b{\times}l$ можно ограничиться прямоугольным в плане грунтовым массивом размера $2b{\times}2l{\times}H$. На поверхности основания введем квадратную сеть узлов, вертикальные перемещения которых будем рассматривать как степени свободы основания, определяющие его состояние. Шаг сети примем s, положение сети выберем таким, чтобы головы свай совпадали с узлами.

Введем механическую модель основания в виде системы упругих связей узлов основания между собой и каждого узла с землей (рис. 2). Если потенциальная энергия совокупности упругих связей механической модели есть функция перемещений узлов, совпадающая с такой же функцией для энергии де-

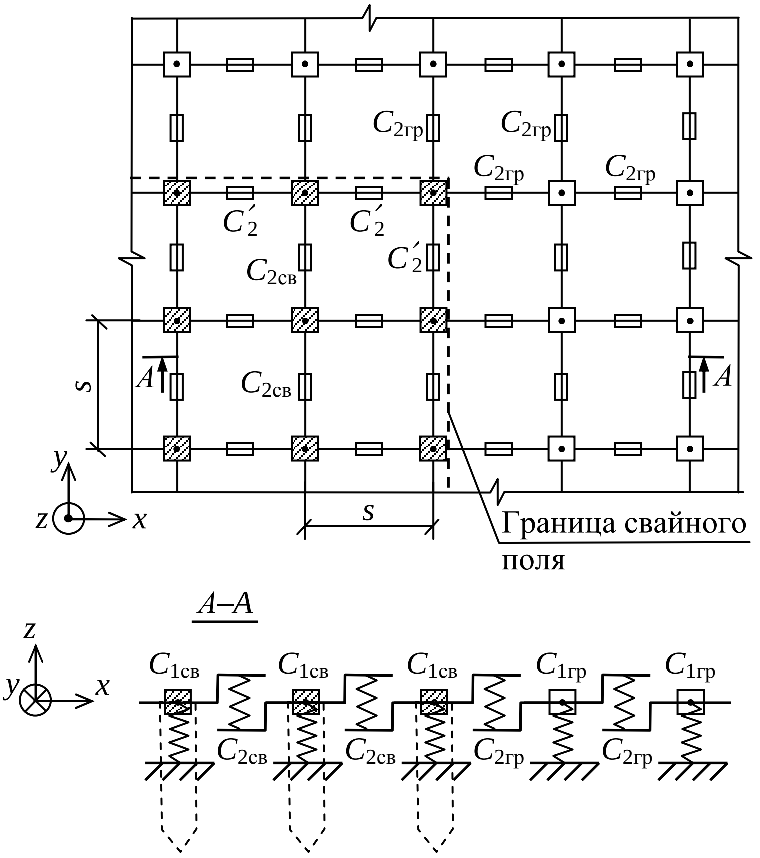

Рис. 2. Модель основания.
Условные обозначения:
— упругая связь направления z между узлами в плане;
— узел сваи с плавающей заделкой;
— узел грунта с плавающей заделкой.
Связь «плавающая заделка» уничтожает вращения узлов [3]

формации заданного упругого основания, то можно говорить об эквивалентности механической модели реальному основанию. Имеется в виду, что в этом случае напряженно-деформированное состояние (НДС) каркаса сооружения, соответствующее минимуму полной потенциальной энергии системы «каркас-основание», можно получить, заменяя сплошное упругое основание его моделью «на пружинках». Покажем, что приближенное совпадение потенциальной энергии механической модели как функции перемещений узлов с полной энергией деформации основания можно обеспечить, задавая 4 параметра — жесткости упругих связей

$$C_{1\text{св}},\ C_{2\text{св}},\ C_{1\text{гр}},\ C_{2\text{гр}}. \qquad (1)$$

Здесь индекс «1» указывает, что рассматривается жесткость связи узла с землей; индекс «2» указывает на жесткость парной связи; индекс «св» указывает, что узлы, для которых вводится жесткость, находятся в пределах СП (кроме парных связей, расположенных по контуру СП); индекс «гр» указывает, что соответствующие узлы находятся на грунте вне СП (в случае парной связи хотя бы один узел пары находится вне СП). В рассматриваемой модели жесткости C'_2 парных связей, расположенных по контуру СП (Рис. 2), вычисляются через жесткости парных связей строго внутри и вне СП по формуле:

$$C_2' = \frac{C_{2\text{св}} + C_{2\text{гр}}}{2}. \qquad (2)$$

Полагаем, что перемещение грунта в горизонтальном направлении отсутствует:

$$u = v = 0. \qquad (3)$$

Этому соответствует боковое обжатие

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z. \qquad (4)$$

Здесь и далее рассматриваются напряжения в грунте, вызванные нагрузкой от фундамента (без учета собственного веса грунта).

Расчет составляющей потенциальной энергии вследствие линейной деформации грунта. Выделим под каждым узлом прямую призму грунта высотой H квадратного сечения $s \times s$, так чтобы узел находился на оси призмы (рис. 3, поз. 1). Искомая составляющая энергии деформации призмы имеет вид [4]:

$$U_{\varepsilon\,\text{пр}} = \int_V U_\varepsilon dV; \qquad U_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z, \qquad (5)$$

где интеграл берется по всему объему призмы и учтено, что $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. Для вычисления энергии (5) введем следующие допущения:

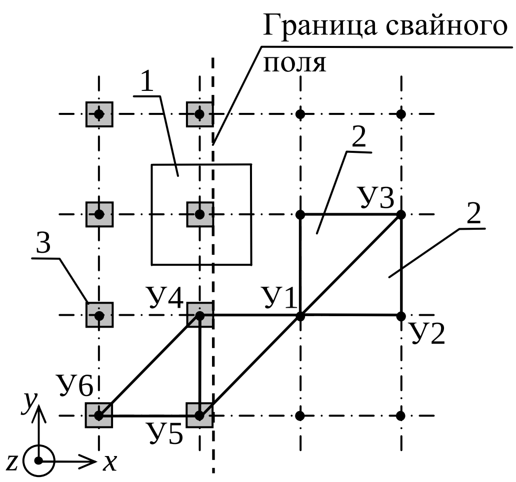

Рис. 3. Призмы в толще грунта:
1 — четырехугольная призма;
2 — треугольная призма;
3 — голова сваи;
Уi — узел основания

1. Для призмы, содержащей сваю, напряжение σ_z ниже конца сваи постоянно в пределах призмы, тогда как выше конца сваи $\sigma_z = 0$.
2. Для призмы, не содержащей сваю, напряжение σ_z постоянно в пределах призмы.

Допущение 1 соответствует гипотезам Пастернака, которые устанавливают свойства НДС столбика грунта в зависимости от положения и формы его верхней границы [1]. Согласно этим гипотезам при плоской деформированной поверхности грунта суммарная сдвигающая сила на боковой поверхности столбика нулевая, и давление на верхнюю границу столбика уравновешивается таким же давлением со стороны нижней границы линейно-деформируемого слоя. В данном случае деформированную поверхность условного фундамента можно считать плоской.

Допущение 2 неадекватно описывает НДС грунта: обычно вблизи СП в нижней части призмы напряжение $|\sigma_z|$ существенно больше усредненного сжимающего напряжения $\bar{\sigma}$, соответствующего заданному укорочению призмы в отсутствии сдвигающих сил на боковых гранях, тогда как с ростом координаты z это напряжение падает до нуля. Однако допущение 2 дает возможность установить порядок величины энергии деформации (5) и получить хотя бы грубое приближение жесткости $C_{1\text{гр}}$ модели основания. Из четырех жесткостей упругих связей (1) параметр $C_{1\text{гр}}$ предполагается далее подбирать так, чтобы механическая модель наилучшим образом описывала напряженное состояние грунта, деформированного по закону Кулона-Мора [5, с. 97]. Конечной целью построения механической модели является описание работы реального грунта, а не его идеализации — линейно-упругого слоя.

Вычислим интеграл (5) для призмы со сваей при заданном вертикальном перемещении узла сваи $w^{\text{в}}$. Подстановкой (4) в обобщенный закон Гука получим в любом из m слоев под концом сваи:

$$\varepsilon_{zi} = \psi_i \sigma_z \,; \tag{6}$$

$$\psi_i \equiv \frac{1}{E_i} \frac{1 - \nu_i - 2\nu_i^2}{1 - \nu_i} \,. \tag{7}$$

Представим σ_z через $w^{\text{в}}$, для чего в выражение

$$w^{\text{в}} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{zi} h_i$$

сделаем подстановку (6). Получим:

$$\sigma_z = \frac{w^{\text{в}}}{\sum_{i=1}^{m} \psi_i h_i} \,. \tag{8}$$

Отсюда для объемной энергии линейной деформации k-го слоя имеем:

$$U_{\varepsilon k} = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_{zk} = \frac{1}{2}\psi_k \sigma_z^2 = \frac{1}{2} w^{\text{в}\,2} \frac{\psi_k}{\left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i h_i\right)^2}.$$

Для интеграла энергии (5) получаем:

$$U_{\varepsilon\ \text{пр}} = \sum_{k=1}^{m} U_{\varepsilon k} s^2 h_k = \frac{1}{2} s^2 w^{\text{в}\,2} \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \psi_i h_i}. \tag{9}$$

Для призмы грунта вне СП с помощью допущения 2 можно получить аналогичное выражение, которое отличается от (9) заменой предела суммы m на n. Обозначим

$$C_{1\text{св}} = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{m} \psi_i h_i}; \qquad C_{1\text{гр}} = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n} \psi_i h_i}. \tag{10}$$

Суммированием энергий $U_{\varepsilon\ \text{пр}}$ по всем призмам получим полную энергию линейной деформации грунтовой толщи U_ε в виде:

$$2U_\varepsilon = \sum_{i \in \{\text{СП}\}} C_{1\text{св}} w_i^{\text{в}\,2} + \sum_{i \notin \{\text{СП}\}} C_{1\text{гр}} w_i^{\text{в}\,2}, \tag{11}$$

где $\{\text{СП}\}$ — набор номеров узлов, расположенных в пределах СП; $w_i^{\text{в}}$ — перемещение i-го узла (обозначаемого далее Уi).

Расчет составляющей потенциальной энергии вследствие деформации сдвига грунта. Разобьем сжимаемую толщу на совокупность треугольных прямых призм, таких что ребра каждой призмы соединяют три ближайших друг к другу узла как показано на рис. 3. Пусть в результате сдвиговых деформаций ребро призмы направления x повернулось в плоскости xz на угол $\gamma_{xz}^{\text{в}}$, а ребро направления y повернулось в плоскости yz на угол $\gamma_{yz}^{\text{в}}$. Указанные углы суть углы сдвига на поверхности грунта; для призмы с узлами У1—У3 на рис. 3 они показаны на рис. 4 и представляются через вертикальные перемещения $w_i^{\text{в}}$ соответствующих

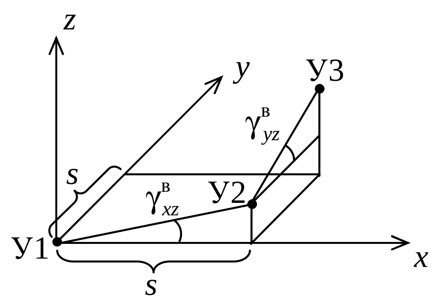

Рис. 4. Перемещения узлов при сдвиге

узлов Уi в виде:

$$\gamma^{\text{в}}_{xz} = \frac{w^{\text{в}}_2 - w^{\text{в}}_1}{s}; \qquad \gamma^{\text{в}}_{yz} = \frac{w^{\text{в}}_3 - w^{\text{в}}_2}{s}. \tag{12}$$

Для любой другой призмы эти формулы остаются справедливыми (с точностью до знака угла сдвига) при подходящей нумерации перемещений узлов. Составляющая энергии деформации треугольной призмы вследствие сдвига имеет вид:

$$U_{\gamma\,\text{пр}} = \int_V U_\gamma dV; \qquad U_\gamma = \frac{1}{2}(\tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) = \frac{1}{2}G_k(\gamma^2_{xz} + \gamma^2_{yz}), \tag{13}$$

где учтено, что $\gamma_{xy} = 0$; $G_k = \dfrac{E_k}{2(1+\nu_k)}$ — модуль сдвига k-го слоя.

Для вычисления энергии (13) введем очередные допущения:

3. Угловая деформация в горизонтальном сечении треугольной призмы постоянна.
4. Эпюра угловой деформации по высоте пропорциональна эпюре вертикальных перемещений грунта, отвечающих допущениям 1—2.

Обоснованность допущения 3 определяется малостью шага сети s. Допущение 4 есть следствие гипотез Пастернака об НДС столбика грунта с плоской верхней границей [1, с. 52]: эпюры вертикальных перемещений w_{I} и w_{II} на двух вертикалях внутри такого столбика пропорциональны, следовательно, пропорциональна эпюра разности $w_{\text{I}} - w_{\text{II}}$, которая с точностью до множителя есть эпюра угла сдвига.

Рассмотрим вначале призму, в которой хотя бы один узел находится вне СП. Эпюра перемещений w на вертикальной базовой линии внутри такой призмы монотонная кусочно-линейная (рис. 5, слева). Ординаты на границах слоев получаются с помощью подстановок (6) и (8) при замене m на n:

$$w_j = \sum_{i=1}^{j} \varepsilon_{zi} h_i = q_j w^{\text{в}}, \quad j = \overline{0, n};$$

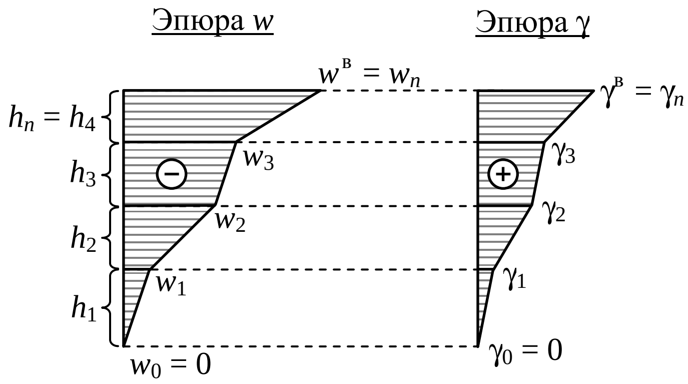

Рис. 5. Эпюры деформаций грунта вне свайного поля (случай n = 4)

$$q_j \equiv \frac{\sum_{i=1}^{j} \psi_i h_i}{\sum_{i=1}^{n} \psi_i h_i} \text{ при } j = \overline{1, n};\ q_0 \equiv 0. \tag{14}$$

На рис. 5 показана пропорциональная эпюра угла сдвига, для которой

$$\gamma_j = q_j \gamma^{\text{в}},\ j = \overline{0, n}. \tag{15}$$

Получим энергию деформации сдвига части призмы, расположенной в k-м слое грунта. Начало отсчета координаты z перенесем в низ k-го слоя. Имеем:

$$U_{\gamma k} = \frac{s^2}{2} \int_0^{h_k} \frac{1}{2} G_k (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) dz, \tag{16}$$

причем для каждой из деформаций γ_{xz}, γ_{yz} справедливо:

$$\gamma = \gamma_{k-1} + \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{h_k} z. \tag{17}$$

После подстановок (15) в (17) и (17) в (16) получаем:

$$U_{\gamma k} = \frac{s^2}{4} G_k \frac{h_k}{3} \left(q_{k-1}^2 + q_{k-1} q_k + q_k^2 \right) \left(\gamma_{xz}^{\text{в}\,2} + \gamma_{yz}^{\text{в}\,2} \right). \tag{18}$$

Положим

$$C_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} G_k h_k \left(q_{k-1}^2 + q_{k-1} q_k + q_k^2 \right). \tag{19}$$

Тогда после подстановок (12) в формулу (18) и суммирования по k получим искомую энергию (13) в виде:

$$U_{\gamma\,\text{пр}} = \frac{1}{2}\frac{C_2}{2}\left[\left(w_2^{\text{в}} - w_1^{\text{в}}\right)^2 + \left(w_3^{\text{в}} - w_2^{\text{в}}\right)^2\right]. \tag{20}$$

Для треугольной призмы внутри СП формулы (19), (20) остаются справедливыми, если формулу (14) видоизменить следующим образом:

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^{j}\psi_i h_i}{\sum_{i=1}^{m}\psi_i h_i} \text{ при } j = \overline{1,m};\; q_0 = 0;\; q_j = 1 \text{ при } j = \overline{m+1,n}. \tag{21}$$

Это требование с очевидностью следует из того, что в межсвайном пространстве угол сдвига не меняется по высоте, так же как и перемещение грунта w на вертикальной базовой линии.

При суммировании энергии сдвига по всем призмам слагаемые с выражением $\left(w_i^{\text{в}} - w_j^{\text{в}}\right)^2$ будут встречаться дважды, поскольку каждое ребро, соединяющее узлы Уi и Уj, принадлежит двум смежным призмам[1]. Обозначим

$$C_{2\text{гр}} = C_2 \text{ с подстановками (14)}; \quad C_{2\text{св}} = C_2 \text{ с подстановками (21)}. \tag{22}$$

Тогда полная энергия деформации сдвига грунтовой толщи U_γ может быть представлена в виде:

$$2U_\gamma = \sum_{i,j\text{ внутри СП}} C_{2\text{св}}\left(w_i^{\text{в}} - w_j^{\text{в}}\right)^2 + \sum_{i,j\text{ вне СП}} C_{2\text{гр}}\left(w_i^{\text{в}} - w_j^{\text{в}}\right)^2 + \sum_{i,j\text{ по краю СП}} C_2'\left(w_i^{\text{в}} - w_j^{\text{в}}\right)^2. \tag{23}$$

Здесь C_2' определяется формулой (2); суммирование ведется по всем парам (i, j), для которых расстояние между узлами Уi и Уj составляет s, причем первая сумма содержит все пары узлов внутри СП (но не на контуре его), вторая сумма содержит все пары, у которых хотя бы один узел находится вне СП; третья

[1] Для призм на границе грунтового массива это не так, но на большом удалении от СП свойства грунта мало влияют на НДС фундамента.

сумма содержит пары, расположенные по контуру СП. В примере на рис. 3 пара (5, 6) входит в первую сумму, пара (4, 1) — во вторую сумму; пара (4, 5) — в третью сумму.

Полная потенциальная энергия деформации грунтовой толщи, получаемая суммированием выражений (11) и (23), взятых с коэффициентом ½, есть функция перемещений узлов $w_i^{\text{в}}$, совпадающая с аналогичной функцией для потенциальной энергии упругих связей четырехпараметрической механической модели на рис. 2. Совпадение функций для потенциальной энергии модели и грунтовой толщи означает эквивалентность модели рассматриваемому грунту как системы с конечным числом степеней свободы.

Метод моделирования свайного основания с помощью описанной системы упругих связей, параметры которой определяются формулами (10) и (22), назовем методом упругих связей. Результаты моделирования по этому методу и сравнительный анализ различных методов моделирования основания будет дан в части 2 статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Гос. изд. литературы по стр. и арх., 1954. 56 с.
2. Созанович М.Е. О некоторых аспектах расчетов фундаментов // Пром. и гражд. стр-во, 2006. № 8. С. 60–61.
3. Русаков А.И. Строительная механика. Учеб. пособие. – М.: Проспект, 2009. 360 с.
4. Русаков А.И. Курс лекций по сопротивлению материалов. Учеб. пособие для вузов. – Ростов-на-Дону: Книга, 2004. 336 с.
5. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1978. 447 с.